# Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.

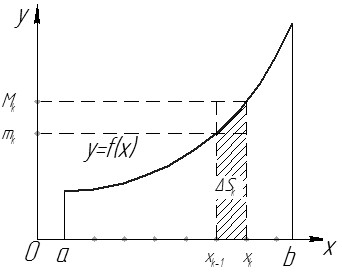
***Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах***

Рис.

непрерывна на

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями Пусть – разбиение отрезка на элементарные отрезки ; ; .

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию . Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции на

заключена между площадями прямоугольников с высотой и

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы, соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу); при

Из (1.9.1) получаем:

***Замечания***:

1. (см. рис. 19.)

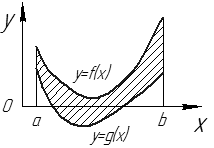


Рис.

1. (см. рис. 20).

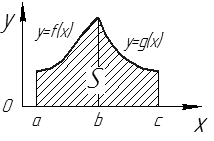


Рис.

1. (см. рис. 21).

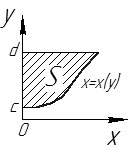
******

Рис.

***Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.***

Рассмотрим кривую, , где функция непрерывна на .

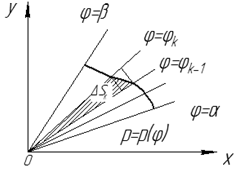


Рис.

Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями . Пусть – разбиение :

Рассмотрим площадь части фигуры, удовлетворяющей условию (см. рис. 22). Пусть и – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции :

*.*

заключена между площадями круговых секторов радиусов и :

Сложим по от до :

Т.е.

где – интегральные суммы функции , соответствующие разбиению и выбору точек и соответственно (нижняя и верхняя интегральные суммы).

При из (1.9.2) получаем: .

***Замечания***:

1. (см. рис. 23).

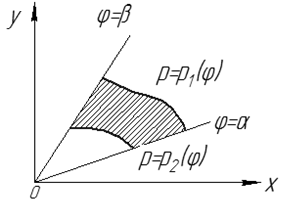
**

Рис.

1. (см. рис. 24).

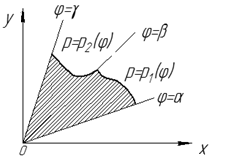


Рис.

# Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений и объемов тел вращения.

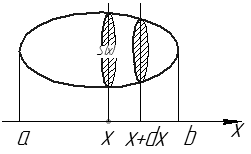


Рис.

Рассмотрим в пространстве тело , каждая точка которого удовлетворяет неравенству . Пусть площадь сечения плоскостью равна непрерывна на . Найдем объем тела . Зафиксируем . Рассмотрим малое . Рассмотрим часть (слой) тела , соответствующий отрезку . Объем этой малой части приблизительно (c точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно равен объему цилиндра с площадью основания и высотой

Суммируя по всем таким тонким слоям, получаем

***Объемы тел вращения.***

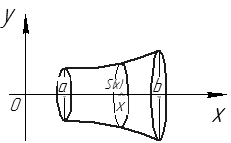


Рис.

Фигура, ограниченная линиями , вращается вокруг оси (см. рис. 26).

Найдем объем тела вращения. Зафиксируем . Сечение тела плоскостью – круг радиуса . Тогда

Ту же фигуру вращаем вокруг оси (см. рис. 27).

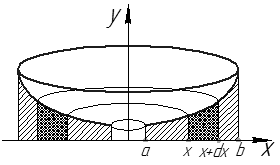


Рис.

Рассмотрим малый отрезок , где . При вращении соответствующей части фигуры получаем тело объема , где – площадь кольца радиусов и соответственно:

Тогда

Суммируя по тонким "слоям", получим

Общий случай:

Таким образом получаем для вращения фигуры, ограниченной линиями, имеем

При вращении фигуры, ограниченной линиями (см. рис. 28).

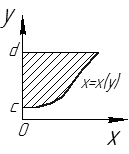
**

Рис.

# Вычисление длин дуг кривых и площадей поверхностей вращения

***Длина дуги кривой.***

Пусть дуга задана параметрическими уравнениями:

Функции имеют на непрерывные производные.

,

Рассмотрим переменную точку

– переменная дуга длиной .

Дифференциал дуги

– длина всей дуги.

Случай плоской кривой:

Случай графика функции :

Случай кривой, заданной в полярных координатах:

***Площадь поверхности вращения.***

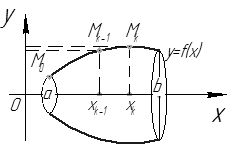


Рис. 29

Рассмотрим функцию – непрерывна на

Пусть – дуга графика – вращается вокруг оси . Рассмотрим ломаную , вписанную в дугу , где (см. рис. 29).

При вращении вокруг звена ломаной получим боковую поверхность усеченного конуса.

***Опр.*** Площадью поверхности вращения называется предел сумм площадей боковых поверхностей усеченных конусов, полученных при вращении вписанной ломаной, при стремлении к максимальной длины звена ломаной.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований и и образующей равна

В данном случае

,

Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса , полученной при вращении звена ломаной

Отсюда площадь поверхности вращения

или

(при надо брать ).

Случай кривой, заданной параметрическими уравнениями:

Случай кривой, заданной в полярных координатах:

Аналогично при вращении вокруг оси :

Случай произвольной оси вращения:

– расстояние от переменной точки кривой до оси вращения; – дифференциал дуги.